Lucrarea 5

Numere şi Sumatoare Zecimale (BCD şi BCD Exces de 3)

Sunt prezentate codificările binare ale numerelor zecimale în format Binary Coded Decimal (BCD) şi BCD în exces de 3. Aceste codificări revenică algoritmi speciali pentru adunarea numerelor în reprezentările corespunzătoare. Pe lângă prezentarea acestor algoritmi şi a dispozitivelor hardware ce le corespund, sunt introduse exemple edificatoare în ceea ce priveşte diferența de performanță între dispozitivele BCD şi cele BCD – exces de 3.

1 Numere Zecimale Codificate Binar - BCD

Există multe aplicații în care operația dominantă reprezintă intrarea şi ieşirea de date, ori este cunoscut faptul că în lumea exterioară operăm în sistemul zecimal iar în sistemele de calcul operăm în sistemul binar. Operația implică multe conversii zecimal–binare respectiv binar–zecimale.

Aceste reprezentări implică multe calcule consumatoare de timp deci soluțiile sunt nesatisfăcătoare. Accelerarea operației de conversie se obține pentru nişte reprezentări aparte a numerelor zecimale şi una dintre ele se caracterizează prin faptul că fiecare cifră zecimală este convertită în mod separat.

Un astfel de cod poartă denumirea de cod BCD (binary-coded-decimal), care este caracterizat prin faptul că fiecare cifră binară este substituită printr-un cvartet binar.

$$b_{i,3}b_{i,2}b_{i,1}b_{i,0}, i \geq 1 \tag{5.1}$$

Se obține un cod ponderat pentru numere zecimale caracterizat prin faptul că fiecare cifră binară $b_{i,j}$ are asociată ponderea $10^{i-1}2^{j}, i \geq 1, j \geq 0$

$$N = 437 = \underbrace{0100}_{4}\underbrace{0011}_{3}\underbrace{0111}_{7}\,) \tag{5.2}$$

Conversia este foarte simplă, dar ea are dezavantajul că operația cea mai frecventă, care este adunarea, întâmpină dificultatea constituită de „corecția de 6“ deoarece sunt sume pe coduri de 4 biți care nu dau carry out deşi corespondentul lor zecimal este mai mare decât 9. În următoarea ecuație este prezentat un exemplu de adunare în BCD.

$$\begin{array}{ccccccc}
437 & = & 0100 & & 0011 & & 0111 \\
\underline{+578} & = & \underline{0101} & & \underline{0111} & & \underline{1000} \\
1015 & & 1001 & & 1010 & & 1111 \\
 & & \underline{0001} & & \underline{0001} & + & \underline{0110} \\
 & & 1010 & & 1011 & 1 & \underbrace{0101}_{5} \\
 & + & 0110 & + & 0110 & & \\
 & \underbrace{1}_{1} & \underbrace{0000}_{0} & 1 & \underbrace{0001}_{1} & &
\end{array} \tag{5.3}$$

La operația de adunare, care se efectuează cifră zecimală cu cifră zecimală sau cvartet binar cu cvartet binar, fie se obține carry din cifra cea mai semnificativă a cvartetului fie se obține echivalentul binar corespunzător valorilor zecimale 10,11,12,13,14,15. Se aplică „corecția de 6“ constând din adunarea echivalentului binar al cifrei zecimale 6 la cvartetul rezultatului. Corespondentul hardware pentru operația de adunare be două cifre BCD este prezentat în Figura 5.1.

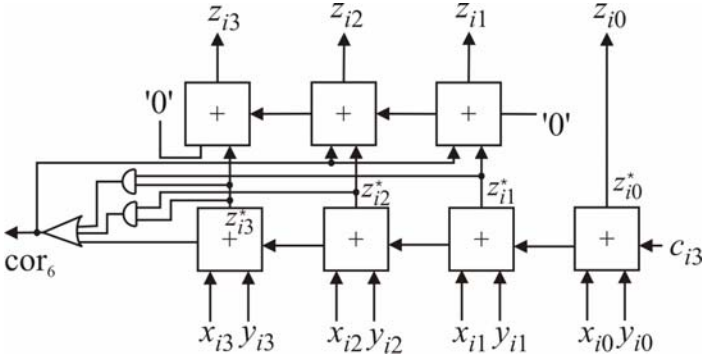

Figura 5.1 Dispozitivul de adunare pe o cifră BCD, cu etajul superior de cellule de însumare completă pe 1 bit fiind folosit în vederea corecției de 6, prin punerea pe ‘1’ a semnalului ‘cor_6’.

2 Reprezentarea BCD în Exces de 3

Un alt cod este codul zecimal „exces de 3“. Adunarea numerelor în acest codul se efectuează fără nici un fel de intervenție de tipul „corecției de 6“ prin circuitele care realizează această operație asupra numerelor binare. Regula de obținere a rezultatului în cod exces de 3 este:

- dacă în urma efectuării operației de adunare a doi cvarteți binari nu rezultă transport atunci se obține rezultatul corect prin scăderea valorii 3 (a echivalentului binar al cifrei 3);

- dacă la adunarea a doi cvarteți binari se obține transport atunci rezultatul corect se obține prin adunarea lui 3.

Avantajul codificării în exces de 3 constă în faptul că nu mai depinde corecția adunării echivalenților binari ai cifrelor zecimale de operația de corecție de 3, care poate fi efectuată în mod completamente independent. Cum corecția revendică o penalitate semnificativă de performanță, această facilitate este extrem de importantă pentru construcția unor dispozitive eficiente de adunare a numerelor zecimale codificate binar.

În continuare prezentăm un exemplu de adunare a două numere zecimale codificate în BCD în exces de 3 :

$$
\begin{array}{lllllll}
437 & = & 0111 & & 0110 & & 1010 \\
\underline{+572} & = & \underline{1000} & & \underline{1010} & & \underline{0101} \\
1009 & 1 & 0000 & 1 & 0000 & 0 & 1111 \\
 & \underline{+0011} & \underline{+0011} & & \underline{+0011} & & \underline{-0011} \\
 & \underbrace{0100}_{1} & \underbrace{0011}_{0} & & \underbrace{0011}_{0} & & \underbrace{1100}_{9}
\end{array} \tag{5.4}
$$

Prin eroare se schimbă numărul de biți de „1“ corespunzători codificării cifrei zecimale iar eroarea poate fi detectată imediat. Codul 2 din 5 este codul de eroare, el revendicând, pentru atributul suplimentar al detectării erorilor, investiția suplimentară cu un bit. Relativ la codificările zecimale putem spune că:

- ele revendică un număr mai mare de biți. De exemplu dacă avem un număr cu n biți lungime prestabilită atunci nu mai pot fi codificate în binar 2^n numere ci $2^{0,83n}$, unde valoarea 0,83n se obține din raționamentul:

$$
\begin{array}{l}
2^{10} \cong 1024 \cong 1000 \cong 10^3 \\
10.............3 \\
x.............\dfrac{n}{4} \Rightarrow x = \dfrac{10}{12} n = 0,83n
\end{array}
$$

Capacitatea de reprezentare a numărului pe n biți este:

- în binar 2^n numere;
- in BCD $10^{\frac{n}{4}}$ numere;
- la circuitele care lucrează cu aceste numere operațiile fundamentale de adunare sunt mai complicate datorită faptului

că transportului posibil între biții adiacenți nu îi corespunde o pondere determinată fixă, ci ea diferă.

3 Decimal ripple carry Adder

La adunarea numerelor zecimale reprezentate în BCD pot fi utilizate toate soluțiile de adunare prezentate anterior şi pentru simplitate vom expune problema în contextul RCA, scop în care prezentăm următoarea schemă:

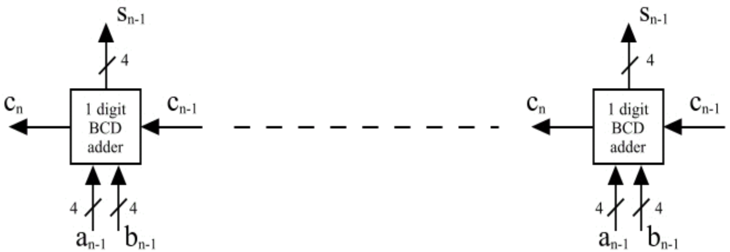

Figura 5.2 Construcția în manieră RCA, cu celule BCD de însumare pe 1 cifră zecimală, a unui umator BCD.

4 Aplicații

Problema 5.1

Să se proiecteze un sumator BCD-Exces de 3 pe 5 cifre zecimale, folosind tehnica Carry Skip Adder, astfel încât penalitatea de performanță (întârzierea) să fie cât mai mică cu putință şi să se estimeze această întârziere în termeni de τ, unde τ este întârzierea pe porțile AND şi OR, iar poarta XOR are o întârziere de 2τ.

Rezolvare:

Reprezentarea în exces de 3 are ca efect separarea însumării echivalenților binari de partea de corecție. Practic, însumarea echivalenților binari (inclusiv transmiterea carry-ului) se poate face fără a ține cont de corecția de 3. Prin urmare, se poate folosi un sumator carrz skip (CSKA) pe 20 de biți (5 cifre zecimale × 4 biți pentru reprezentarea cifrei) în vederea însumării echivalenților binari ai numerelor de însumat, urmând ca operația de corecție să fie efectuată cu ajutorul a 5 dispozitive de corecție pe o cifră zecimală.

Varianta CSKA optimă pe 20 de biți este cea cu segmente inegale de tip 2-5-6-5-2. Sumatorul de proiectat va lucra cu cifre zecimale reprezentate binar, de tipul $X_i[3:0]=x_{i3}\ x_{i2}\ x_{i1}\ x_{i0}$, (unde x_{ij} sunt cifre binare), după cum se arată în Figura 5.3.

Schema de principiu a sumatorului - fără partea de corecție - este prezentată în Figura 5.4. Ieşirile acestui sumator sunt semnale de tipul s^*_{ij} şi vor constitui intrări pentru cele 5 circuite de corecție pe o cifră zecimală codificată în exces de 3. Circuitele de corecție au structura prezentată în Figura 5.5, justificată de necesitatea adunării grupării binare '1101' la echivalentul binar al cifrei i ($s^*_{i3}\ s^*_{i2}\ s^*_{i1}\ s^*_{i0}$) atunci când $c_{(i+1)\times 4}$ este '0', iar atunci când este '1', se va aduna gruparea binară '0011'.

Din lanțul de carry al sumatorului din Figura 5.4, cel mai întârziat este semnalul c_{20} (19 τ deoarece este carry out-ul unui sumator CSKA cu segmente 2-5-6-5-2). Prin urmare, vom face evaluarea pe circuitul de corecție corespunzător lui i=4. În acest circuit, după cum se arată şi în Figura 5.5, s^*_{40} are o întîrziere de 21 τ, iar s^*_{41} 23 τ, s^*_{42} 17 τ, s^*_{43} 19 τ. Rezultatul: s_{43} are o întârziere de 29 τ.

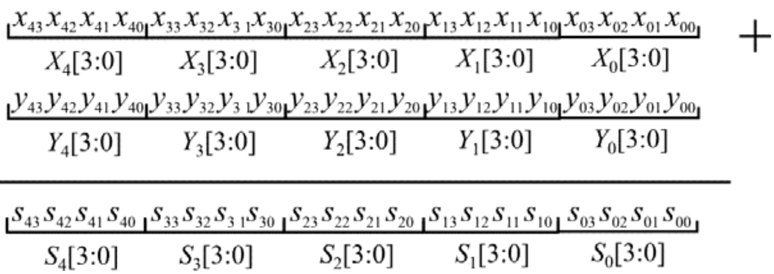

Figura 5.3 Reprezentarea binară a numerelor de însumat în exces de 3.

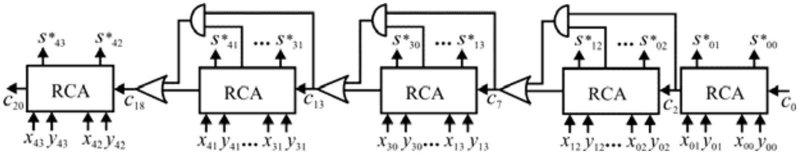

Figura 5.4 Sumatorul BCD-E3 pe 5 cifre zecimale, fără partea de corecție.

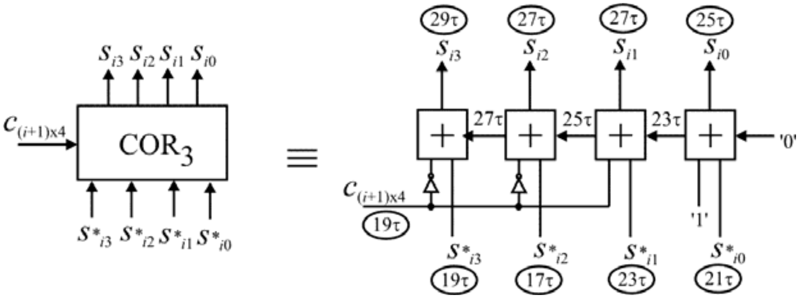

Figura 5.5 Circuitul de corecție pe o cifră zecimală în exces de 3.

Problema 5.2 (propusă) Să se calculeze întârzierea, în termeni de τ, pentru celula BCD din Figura 5.1.

Problema 5.3 (propusă) Să se calculeze întârzierea, în termeni de τ, pentru un sumator BCD cu celule conectate în manieră RCA, pe 5 cifre zecimale.